Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Compito di Analisi III per Ingegneria Online (Gestionale e Informatica) **10–12–05; Soluzioni**

Esercizio 1. L'esercizio è standard per cui eviterei di esplicitarne la soluzione che era data dalla risposta R1. Basti dire che bisogna annullare il gradiente della funzione e studiare la martice hessiana in ciascun punto di annullamento del gradiente. Quattro studenti su 8 hanno indicato la corretta risposta.

Esercizio 2. La risposta è $\int_0^2 dr \int_0^{\pi/2} r\sqrt{1+\frac{1}{4}r^2} = \frac{2}{3}\pi(2^{3/2}-1)$ per cui la risposta era la R7. Tre studenti hanno indicato la risposta giusta anche se uno di essi ha indicato $\frac{2}{3}$ quale risultato.

Esercizio 3. I calcoli da fare sono gli stessi che si trovano alla fine del capitolo 4 (Il teorema delle funzioni implicite) delle lezioni e la risposta era la R1. Sette studenti su 8 hanno dato la risposta giusta.

Esercizio 4. La forma differenziale poteva scriversi come $\omega = x^2ydx + 2y^2xdy + d(x^5y^2) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 + \omega_2$ e quindi $\oint \omega_2 = 0$ (la curva è chiusa). Parametrizzando l'ellisse $x = 2\cos t$ $y = \sin t$ si ha $\oint \omega_1 = \int_0^{2\pi} (-8\cos^2 t \sin^2 t + 4\sin^2 t\cos^2 t) = -\int_0^{2\pi} \sin^2(2t) = -\pi$. Nessuno ha dato la risposta giusta.

Esercizio 5. Sia $\omega_3 = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$. La forma è chiusa *ma non esatta su tutto il suo dominio.* Dovremmo calcolare $\oint \omega_3$ ma ciò produce un integrale di cui non si può trovare la primitiva. Per sapere quanto vale l'integrale bisogna osservare che essendo ω_3 chiusa, l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa regolare è lo stesso indipendentemente dalla curva scelta purché le due curve possono essere sovrapposte in modo continuo senza mai uscire dal dominio della forma ($\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$). Scegliamo quindi la curva $x = \cos t$ e $y = \sin t$ e l'integrale stavolta è 2π. Il risultato è $-\pi + 2\pi = \pi$ ossia la risposta R3. Solo uno studente ha azzeccato la risposta (non so però con quale cognizione avendo egli sbagliato il risultato precedente).

Esercizio 6. Stavolta la curva e il suo interno giacciono in un sottoinsieme in cui ω_3 è esatta. L'integrale che "sopravvive" è solo quello di ω_2 e il risultato è $-\frac{15}{4}\pi$. La risposta era quindi R7. Nessuno ha azzeccato.

Esercizio 7. Il dominio è dato dai punti che stanno dentro l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e fuori dal cerchio di raggio 1. l risultato è quindi $\int\int_{\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1} y^2 - \int\int_{x^2+y^2 \le 1} y^2 = \frac{\pi}{4}$ (si possono usare coordinate polari ellittiche nel primo integrale e polari nel secondo). La risposta giusta era la R1 e un solo studente ha dato al risposta giusta.

Esercizio 8. L'ascissa del baricentro è data dal rapporto di due quantità e quindi l'ascissa è nulla se il numeratore è nullo. Il numeratore è $\int_{-L}^0 \sqrt{2}(3\delta_o)(-x)x + \int_0^{2L} \delta_1 x^2 x = 0$ non appena $\frac{\delta_o}{\delta_1} = 4L$. La risposta era la R1. un solo studente ha risposto esattamente.

Esercizio 9. È un semplice integrale doppio $\int_{-2}^2 dx \int_{x-5}^{4|x|} ydy = -10$. R1 era la risposta giusta. 2 studenti hanno risposto esattamente.

Esercizio 10. $|f_1| \le \frac{|x|\ |\sin\sqrt{x}|}{|x|+|y|} \le \frac{|x|^{3/2}}{|x|+|y|} \le \frac{|x|^{3/2}}{|x|} = |x|^{1/2}$ e quindi il limite esiste ed è zero. $|f_2| = \frac{2\sin^2\frac{x^2y^2}{2}}{|x|^3+y^4} \le \frac{1}{2}\frac{x^4y^4}{|x|^3+y^4} \le x^4$ e quindi il limite esiste ed è zero. $|f_3| = \frac{\sin x}{x}\frac{\tan y^2}{y^2}\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le |x|$ e quindi il limite esiste e vale zero. La risposta era R1. 5 studenti hanno risposto esattamente.

Esercizio 11. Esercizio standard. La risposta è R1. Tutti gli studenti hanno risposto esattamente.